التصحيح المفصل لبكالوريا جوان 2016

الموضوع01   الدورة الاستثنائية   الأستاذ: شداني عبد المالك

تصحيح التمرين الأول (4 نقاط)   المحور: الأعداد المركبة   التنقيط

1) أ) التحقق أن $P(2\sqrt{3})=0$: $P(2\sqrt{3})=(2\sqrt{3})^3-24\sqrt{3}=24\sqrt{3}-24\sqrt{3}=0$

ب) إيجاد العددين a و b :

$$(z-2\sqrt{3})(z^2+az+b)=z^3+az^2+bz-2\sqrt{3}z^2-2a\sqrt{3}z-2\sqrt{3}b$$

$$=z^3+(a-2\sqrt{3})z^2+(b-2a\sqrt{3})z-2\sqrt{3}b$$

بالمطابقة مع عبارة $P(z)$ نجد: $\begin{cases}a-2\sqrt{3}=0\\ b-2a\sqrt{3}=0\\ -2\sqrt{3}b=-24\sqrt{3}\end{cases}$ ومنه نجد : $\begin{cases}a=2\sqrt{3}\\ b=12\end{cases}$.

ج) حلول المعادلة $P(z)=0$:

$P(z)=0$ يكافئ $(z-2\sqrt{3})(z^2-2\sqrt{3}z+12)=0$ يكافئ $\begin{cases}z=2\sqrt{3}\\ z^2+2\sqrt{3}z+12=0 \;\;...(\blacklozenge)\end{cases}$

- حلول المعادلة $(\blacklozenge)$:

لدينا: $\Delta=-36$ ومنه : $z_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+i\sqrt{36}}{2}=-\sqrt{3}+3i$ و $z_2=-\sqrt{3}-3i$

الخلاصة: حلول المعادلة $P(z)=0$ هي: $S=\{2\sqrt{3};-\sqrt{3}+3i;-\sqrt{3}-3i\}$

2) أ) كتابة على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}-3i+\sqrt{3}-3i}=\frac{3\sqrt{3}-3i}{-6i}=\frac{3\sqrt{3}i+3}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ب) تبيان أنه يوجد دوران r مركزه A ويحول B الى C :

ليكن r دوران معادلته المركبة من الشكل $z'=\alpha z+\beta$ حيث $\begin{cases}r(A)=A\\ r(B)=C\end{cases}$ ومنه

$\begin{cases}z_A=\alpha z_A+\beta \;\;...(1)\\ z_C=\alpha z_B+\beta \;\;...(2)\end{cases}$ ومنه : $z_C-z_A=\alpha(z_B-z_A)$ أي $\alpha=\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

بما ان يوجد عدد مركب وحيد α غير معدوم و $|\alpha|=\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$ فإنه يوجد دوران r

مركزه A و يحول B إلى C و زاويته $\theta=\arg\alpha=\arg\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\dfrac{\pi}{3}$

ج) طبيعة المثلث ABC :

شداني عبد المالك 2016

مما سبق نستنتج أن $\begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ ومنه المثلث ABC متقايس الاضلاع.

د) **تعيين z_D :**

z_D لاحقة النقطة D صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ معناه $z_D = z_C + z_{\overrightarrow{AB}}$

ومنه $z_D = z_C + z_B - z_A$ وعليه نجد $z_D = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 3i + \sqrt{3} - 3i$ أي $z_D = 2\sqrt{3} - 6i$

3) **تعيين (Γ) :**

$\arg\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right) = 2\pi k$ تكافئ $\arg(z) - \arg(\overline{z}) = 2\pi k$ مع $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $\arg(z) = \arg(\overline{z}) + 2\pi k$

ومنه (Γ) مجموعة النقط M من المستوي هي حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O

التنقيط	تصحيح التمرين الثاني (4 نقاط) المحور: الهندسة الفضائية

1) أ) **التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) :**

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) ومنه $\overrightarrow{AM} = k \times \vec{u}$ ، $k \in \mathbb{R}$

ومنه نجد : $\begin{cases} x = 1 + kt \\ y = k \\ z = 2 - k \end{cases} / k \in \mathbb{R}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

ب) **تبيان أن (Δ) و (Δ') ليسا من المستوي :**

لدينا ، $\vec{u}(2;1;-1)$ و $\vec{v}(1;1;1)$ اشعة توجيه المستقيمين (Δ) و (Δ') على الترتيب

نلاحظ أن $\dfrac{-1}{1} \neq \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{2}{1}$ وبتالي الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا أي (Δ) و (Δ')

ليسا متوازيان و عليه فإنهما ليسا من نفس المستوي أو متقاطعان في نقطة H

- لتكن $H(x;y;z)$ نقطة التقاطع فهي تحقق $\begin{cases} 1 + 2k = \lambda & (1) \\ k = 4 + \lambda & (2) \\ 2 - k = 2 + \lambda & (3) \end{cases}$

بطرح (1) من(2) نجد: $k = -5$ و بتعويضها في (1) نجد، $\lambda = -9$

من أجل $k = -5$ نجد: $H(-9;-5;-6)$ ومن أجل $\lambda = -9$ نجد $H(-9;-5;-7)$

نلاحظ أن H ليست وحيدة و عليه نستنتج أن (Δ) و (Δ') ليسا من المستوي.

2) أ) **تبيان أن $B(-1;3;1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ') :**

- لدينا من اجل $\lambda = -1$ نلاحظ ان $B \in (\Delta')$ ... (1)

- لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;3;-1)$ و $\vec{v}(1;1;1)$ حيث $\vec{v}$ شعاع توجيه المستقيم(Δ')

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = -2 + 3 - 1 = 0$ أي $\overrightarrow{AB} \perp \vec{v}$ ...(2)

من (1) و(2) نجد $B(-1;3;1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ')

ب) **التحقق أن (AB) عمودي على (Δ) و (Δ') :**

لدينا، $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = (-2 \times 2) + (3 \times 1) + (-1 \times -1) = -4 + 3 + 1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = (-2 \times 1) + (3 \times 1) + (-1 \times 1) = -2 + 3 - 1 = 0 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{v} \end{cases}$

ومنه (AB) عمودي على (Δ) و (Δ') .

	ج) استنتاج المسافة بين (Δ) و (Δ') : $d[(\Delta);(\Delta')]=AB=\sqrt{(-2)^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$

3) أ) إثبات أن N تنتمي الى المستقيم (Δ') :

بوضع $\lambda=-2+t$ نجد، $\begin{cases}4+\lambda=4-2+t=2+t\\2+\lambda=2-2+t=t\end{cases}$ إذن $N\in(\Delta')$

- كتابة عبارة $h(t)$ بدلالة t :

$$h(t)=AN^2=(t-3)^2+(2+t)^2+(t-2)^2=3t^2-6t+17$$

ب) استنتاج قيمة العدد احقيقي t التي من اجلها المسافة AN أصغر ما يمكن:

من اجل كل عدد حقيقي t لدينا، $h'(t)=6t-6$

جدول تغيرات الدالة h :

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$	$+\infty$	$\searrow$	14	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ ان الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى قيمتها $d=14$ من اجل $t=1$

إذن المسافة AN^2 تكون أصغر ما يمكن من اجل $t=1$ و عليه نستنتج أن لمسافة AN تكون أصغر ما يمكن من اجل $t=1$

- المقارنة بين القيمة الحدية الصغرى لـ h و AB :

القيمة الحدية الصغرى لـ h تساوي AB^2 .

التنقيط	تصحيح التمرين الثالث (5 نقاط) المحور: المتتاليات العددية

1) أ) تبيان أن f متزايدة تماما على I :

من اجل كل عدد حقيقي x من I نجد: $f'(x)=\dfrac{169}{(9x+13)^2}$

نلاحظ ان $f'(x)>0$ على المجال I ومنه الدالة f متزايدة تماما على I .

ب) تبيان انه من اجل $x\in I$ فإن $f(x)\in I$:

ليكن $x\in I$ معناه $0\le x\le 4$ ومنه $f(0)\le f(x)\le f(4)$ لأن f دالة متزايدة تماما على I

ومنه $0\le f(x)\le\dfrac{52}{49}$ لاحظ ان $\dfrac{52}{49}\le 4$

ومنه $0\le f(x)\le 4$ ومنه $f(x)\in I$

2) أ) البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le 4$:

نضع، $P(n):\ 0\le u_n\le 4$

المرحلة 01: من اجل $n=0$ ، لدينا $u_0=4$ ومنه $0\le u_0\le 4$ ومنه $P(0)$ محققة

المرحلة02: من أجل n عدد طبيعي ، نفرض صحة $P(n):0\le u_n\le 4$

ونبرهن صحة $P(n+1):\ 0\le u_{n+1}\le 4$

لدينا من فرضية التراجع، $0\le u_n\le 4$ أي $u_n\in I$ ومنه حسب 1)ب) نجد: $f(u_n)\in I$ أي $0\le u_{n+1}\le 4$ ومنه $P(n+1)$ محققة .

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le 4$

ب) دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{13u_n}{9u_n+13}-u_n=\frac{-9u_n^2}{9u_n+13}$

بما أن $0 \le u_n \le 4$ نجد: $\begin{cases}-144 \le -9u_n^2 \le 0 \\ 13 \le 9u_n+13 \le 49\end{cases}$ إذن $u_{n+1}-u_n \le 0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

- بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل بالعدد 0 فإنها متقاربة .

3) تبيان أن $u_n \neq 0$: نستعمل البرهان بتراجع ، نضع $P(n): u_n \neq 0$

المرحلة 01: من أجل $n=0$ ، $u_0=4$ و منه $u_0 \neq 0$ وعليه $P(0)$ محققة .

المرحلة02: من أجل n عدد طبيعي ، نفرض صحة $P(n): u_n \neq 0$

ونبرهن صحة : $P(n+1): u_{n+1} \neq 0$

من فرضية التراجع، $u_n \neq 0$ وعليه $\begin{cases}13u_n \neq 0 \\ 9u_n+13 \neq 0\end{cases}$ و منه $\frac{13u_n}{9u_n+13} \neq 0$ أي $u_{n+1} \neq 0$

الخلاصة: من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \neq 0$

4) أ) برهان أن المتتالية (v_n) حسابية :

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1}=2+\frac{13}{u_{n+1}}=2+\frac{13}{\frac{13u_n}{9u_n+13}}=2+\frac{13(9u_n+13)}{13u_n}=2+\frac{9u_n+13}{u_n}=2+9+\frac{13}{u_n}=9+v_n$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=9$ وحدها الأول $v_0=2+\frac{13}{u_0}=2+\frac{13}{4}=\frac{21}{4}$

ب) كتابة v_n بدلالة n : من أجل n $\mathbb{N}$ ، $v_n=v_0+nr=\boxed{\frac{21}{4}+9n}$

ج) استنتاج عبارة u_n :

لدينا ، $v_n=2+\frac{13}{u_n}$ ومنه $\frac{13}{u_n}=v_n-2$ ومنه $u_n=\frac{13}{v_n-2}$ وعليه $u_n=\frac{13}{\frac{21}{4}+9n+2}$

ومنه $u_n=\frac{13}{\frac{21+36n-8}{4}}$ ومنه $\boxed{u_n=\frac{52}{36n+13}}$.

_ حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$: $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{52}{36n+13}=0$

شرادي عبد المالك 2016

التنقيط	المحور: الدالة اللوغارتمية	تصحيح التمرين الرابع (6,5نقاط)

I) 1) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[-1+(x+1)e+2\ln(x+1)\right]=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\left[-1+(x+1)e+2\ln(x+1)\right]=-\infty$$

إتجاه التغير: من أجل كل عدد حقيقي من $]-1;+\infty[$ ، $g'(x)=1+\dfrac{2}{x+1}$

نلاحظ ان $g'(x)>0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

جدول التغيرات:

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α :

لدينا الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[-0,34\ ;\ -0,33]$ و لدينا ، $\begin{cases} g(-0,34)= \\ g(-0,33)= \end{cases}$

بما أن $g(-0,34)\times g(-0,33)<0$ فإن حسب مبرهة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $-0,34<\alpha<-0,33$

3) إشارة $g(x)$: بقراءة جدول تغيرات الدالة g نلخص اشارتها كما يلي :

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) 1) أ) تبيان ان $\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=-\infty$:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\left[\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\underbrace{\frac{1}{(x+1)^2}}_{+\infty}\left[\underbrace{e(x+1)}_{=0}+\underbrace{\ln(x+1)}_{=-\infty}\right]=-\infty$$

- حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=\lim_{y\to+\infty}\left[\frac{e}{y}+\frac{\ln y}{y^2}\right]=0$$

التفسير الهندسي :

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=-1$ (يوازي محور التراتيب)

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$

ب) حساب $f'(x)$:

من اجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{-e}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)^2-2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-e}{(x+1)^2}+\frac{\cancel{(x+1)}\left[1-\ln(x+1)\right]}{(x+1)^{\cancel{4}}}$$

$$=\frac{-e(x+1)+1-\ln(x+1)}{(x+1)^3}=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

شدايلي عبد الله 2016

ج) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

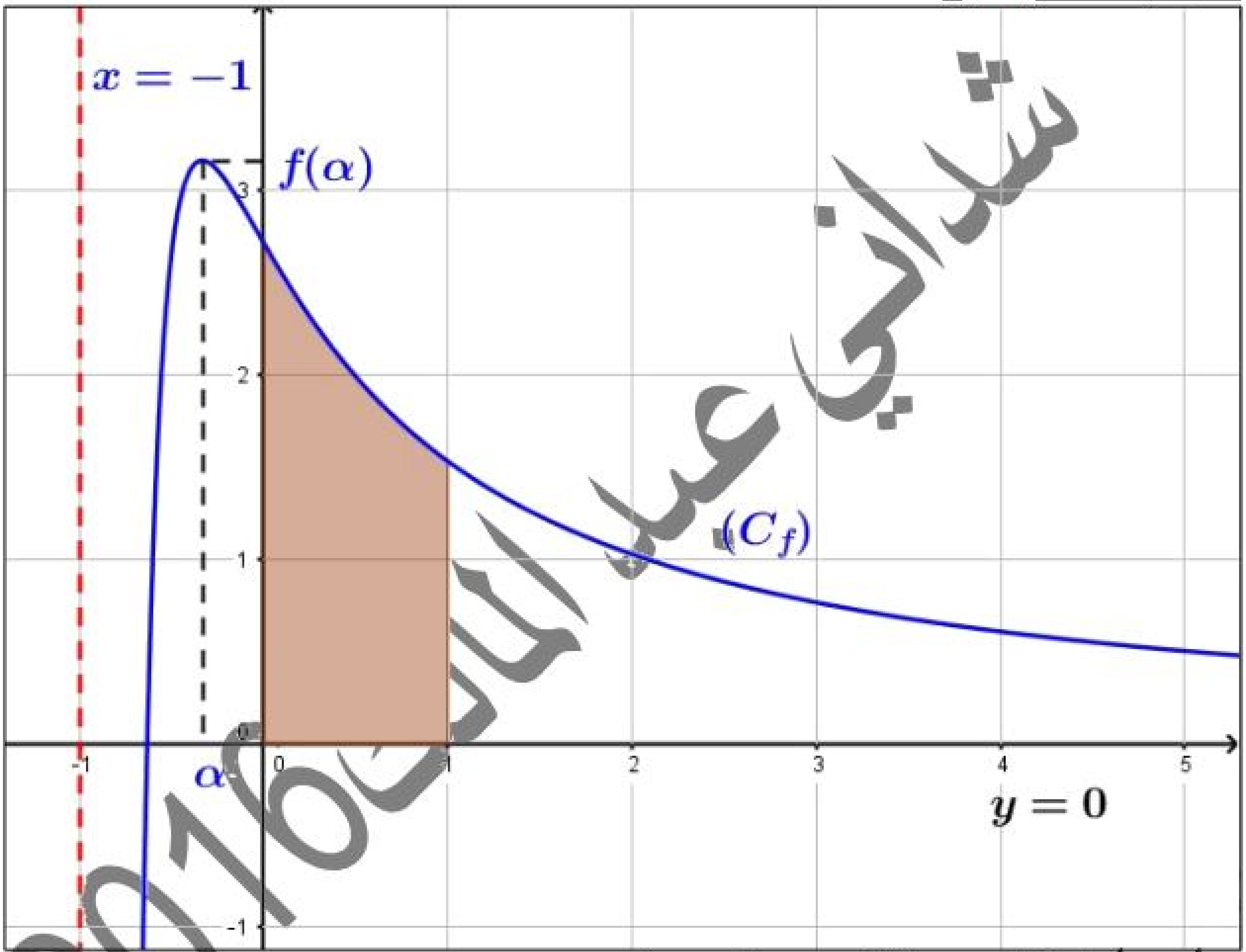
لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ لأن $(x+1)^3>0$ على $]-1;+\infty[$

ومنه: f دالة متزايدة تماما على $]-1;\alpha]$ و متناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$.

جدول التغيرات:

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

د) رسم المنحنى (C_f) :



شداني عبد المالك 2016

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ ،

$$\left(\frac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]\right)'=\left(\frac{-1}{x+1}\right)'\left[1+\ln(x+1)\right]+\left[1+\ln(x+1)\right]'\left(\frac{-1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}\left[1+\ln(x+1)\right]+\frac{1}{x+1}\times\frac{-1}{x+1}$$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}\left[1+\ln(x+1)-1\right]$$

$$=\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

منه الدالة $x\mapsto\frac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هيي دالة اصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على $]-1;+\infty[$

ب) حساب مساحة الحيز:

مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي $x=0$ و $x=1$ هي :

$$S=\int_0^1 f(x)=\int_0^1\left[\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]dx=\left[e\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\big(1+\ln(x+1)\big)\right]_0^1$$

$$=e\ln 2-\frac{1}{2}(1+\ln 2)+1$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}+\left(e+\frac{1}{2}\right)\ln 2\quad u.a}$$

3) أ) **تبيان أن k دالة زوجية :**

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;1[$ فإن $-x$ من $]-1;1[$ و لدينا،

$k(-x)=f(-|-x|)=f(-|x|)=k(x)$ ، إذن k دالة زوجية .

ب) كيفية إستنتاج المنحنى (C_k) إنطلاقا من (C_f) :

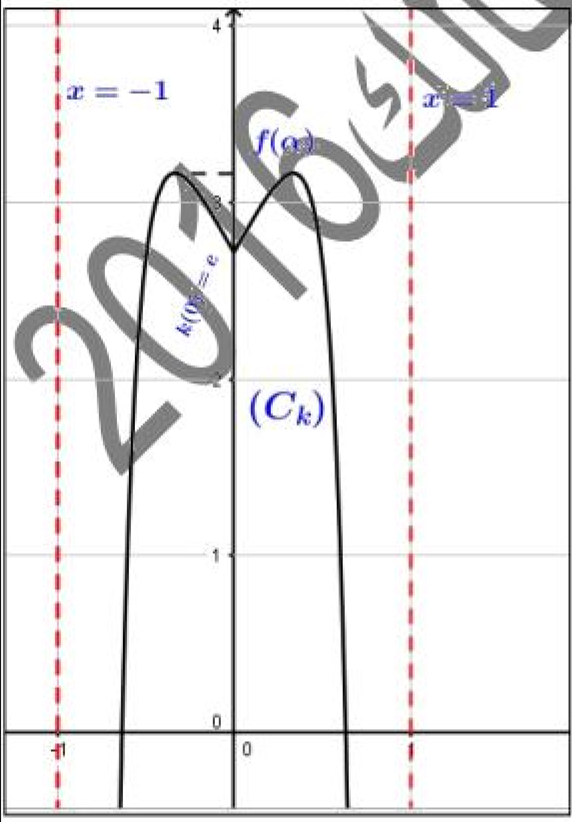
لدينا ، $k(x)=f(-|x|)=\begin{cases}f(-x) & ;\ x\in[0;1[\\ f(x) & ;\ x]-1;0]\end{cases}$ ومنه نستنتج ما يلي :

- (C_k) ينطبق على (C_f) على المجال $]-1;0]$

- وبما أن k دالة زوجية فإن منحناها يكون متناظر مع (C_f) على المجال $[0;1[$

رسم (C_k) :

ج) المناقشة البيانية حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $k(x)=m$:



حلول المعادلة $k(x)=m$ يعود الى تعيين فواصل نقط تقاطع (C_k) مع المستقيم ذي المعادلة $y=m$

المناقشة:

$m>f(\alpha)$: المعادلة لا تقبل حلول

$m=f(\alpha)$: المعادلة تقبل حلين مضاعفين مختلفين في الإشارة

$e<m<f(\alpha)$: المعادلة تقبل أربعة حلول منها حلين موجبين و حلين سالبين

$m=e$: المعادلة تقبل ثلاثة حلول منها، حل موجب و حل معدوم و حل سالب .

$m<e$: المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة

__________000000000000000__________

ثانوية : خالص سليمان - بشلول - البويرة	الشعبة: 3 علوم تجريبية

التصحيح المفصل لبكالوريا جوان 2016

الموضوع02	الدورة الاستثنائية	الأستاذ: شداني عبد المالك

تصحيح التمرين الأول (5نقاط)	المحور: الهندسة الفضائية	التنقيط

1) أ) **تبيان أن النقط A ، B و C تعين مستويا :**

لدينا، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\\5\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-2\\2\end{pmatrix}$ و منه نلاحظ أن $\frac{5}{2}\neq\frac{-2}{-2}\neq\frac{-2}{-5}$ وبتالي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و

$\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا و عليه النقط A ، B و C تعين مستويا

ب) **تبيان أن المعادلة $2x-7y-2z-3=0$ معادلة ديكارتية لـلمستوي (ABC) :**

لدينا، $\begin{cases}2x_A-7y_A-2z_A-3=4-7+6-3=0\\2x_B-7y_B-2z_B-3=0+7-4-3=0\\2x_C-7y_C-2z_C-3=-6+7+2-3=0\end{cases}$ ومنه إحداثيات النقط A ، B و C تحقق

المعادلة $2x-7y-2z-3=0$ إذن فهي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2) كتابة المعادلة الديكارتية للمستوي (P) :

لدينا المستوي (P) يعامد المستقيم (BC) معناه $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

وعليه : $-3x-3z+d=0$ مع $d\in\mathbb{R}$ معادلة ديكارتية لـ (P)

- بما أن $A\in(P)$ نجد: $-3x_A-3z_A+d=0$ أي $d=-3$

إذن معادلة المستوي (P) هي $-3x-3z-3=0$ او $x+z+1=0$.

3) أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) تقاطع المستويين (ABC) و (P) :

لدينا، (D) مستقيم تقاطع المستويين (ABC) و (P) معناه يحقق $\begin{cases}2x-7y-2z-3=0 & (1)\\x+z+1=0 & (2)\end{cases}$

من (2) نجد: $x=-z-1$

ومنه من (1) نجد: $2(-z-1)-7y-2z-3=0$ أي $-7y=4z+5$ أي $y=-\frac{4}{7}z-\frac{5}{7}$

بوضع $z=t$ نجد: $\begin{cases}x=-t-1\\y=-\frac{4}{7}t-\frac{5}{4}\\z=t\end{cases}$ $/\,t\in\mathbb{R}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (D) .

ب) **تبيان أن (D) عمود في المثلث ABC :**

لدينا:- $A\in(P)$ و $A\in(ABC)$ إذن : $A\in(D)$

- $(D)\perp(BC)$ لأن $\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ حيث $\vec{u}(-1;\frac{-4}{7};1)$ شعاع توجيه المستقيم (D)

ومنه المستقيم (D) عمود في المثلث ABC ويشمل النقطة A

شداني عبد المالك 2016

4) أ) **التأكد أن الجملة المعطاة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :**

(Δ) متوسط المتعلق بالضلع $[AC]$ في المثلث ABC معناه :

(Δ) يشمل $I\left(-\frac{1}{2};0;-2\right)$ منتصف القطعة $[AC]$ و النقطة المقابلة للضلع $[AC]$ و هي B

نستنتج ان $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{1}{2};1;-4\right)$ شعاع توجيه المستقيم (Δ) و عليه نجد أن الجملة :

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k \\ y=k \qquad / k\in\mathbb{R} \\ z=-2-4k \end{cases}$$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

ب) **تبيان أن (Δ) و (D) يتقطعان في نقطة G :**

لدينا، $\vec{u}\left(-1;\frac{-4}{7};1\right)$ و $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{1}{2};1;-4\right)$ أشعة توجيه المستقيمين (Δ) و (D) على الترتيب

بما أن $\frac{-4}{1}\neq\frac{1}{\frac{-4}{7}}\neq\frac{\frac{-1}{2}}{-1}$ معناه أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{BI}$ غير مرتبطين خطيا أي (Δ) و (D)

ليسا متوازيان أي أنهما ليسا من نفس المستوي أو متقطعان في نقطة .

- لتكن $G(x;y;z)$ نقطة تقاطع المستقيمين فهي تحقق
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k=-t-1 & (1) \\ k=-\frac{4}{7}t-\frac{5}{7} & (2) \\ -2-4k=t & (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (3) نجد: $-\frac{5}{2}-\frac{9}{2}k=-1$ ومنه $k=-\frac{1}{3}$

من (3) : $t=-2-4\left(-\frac{1}{3}\right)$ أي $t=-\frac{2}{3}$

ومن أجل $(t;k)=\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ نجد: $G\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$

ج) **تبيان أن المثلث ABC متساوي الساقين:**

لدينا، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\\5\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-2\\2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}$ ومنه $\begin{cases} AB=\sqrt{33} \\ AC=\sqrt{33} \\ BC=3\sqrt{2} \end{cases}$ ، المثلث ABC متساوي الساقين

د) **ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمثلث ABC :**

بما أن المثلث ABC متساوي الساقين فإن المستقيم (D) يكون متوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC و عليه النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC لان نقطة تقاطع متوسطاتهـــا (Δ) و (D)

5) **تعيين مجموعة النقط (E) :**

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=3$ تكافئ $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=3$ تكافئ $MG=1$ ومنه مجموعة (E) للنقط M من الفضاء هي سطح الكرة ذات المركز G ونصف القطر 1 .

التنقيط	المحور: الاعداد المركبة	تصحيح التمرين الثاني (4,5 نقاط)

1) أ) إثبات ان المعادلة (E) تكافئ $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$:

لدينا، $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=2\bar{z}^3-2\bar{z}^2+2\bar{z}+5\bar{z}^2-5\bar{z}+5=3\bar{z}^3+3\bar{z}^2-3\bar{z}+5$

ومنه (E) تكافئ $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$

ب) حلول المعادلة (E) :

المعادلة (E) تكافئ $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$ تكافئ $\begin{cases}2\bar{z}+5=0\\ \bar{z}^2-\bar{z}+1=0 \quad (\blacklozenge)\end{cases}$

- $2\bar{z}+5=0$ يكافئ $\bar{z}=-\frac{5}{2}$ أي $z=-\frac{5}{2}$
- حلول المعادلة $(\blacklozenge)$: لدينا ، $\Delta=-3$ ومنه $\bar{z}_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $\bar{z}_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ وعليه

نجد أن : $z_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

الخلاصة : حلول المعادلة (E) هي : $S=\left\{-\frac{5}{2}\ ;\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

2) أ) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي :

لدينا، $|z_A|=1$ و $\arg z_A=-\frac{\pi}{3}$ ومنه $z_A=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$|z_B|=1$ و $\arg z_B=\frac{\pi}{3}$ ومنه $z_B=e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب) إنشـــاء النقط A ، B ، C و D :

ج) إثبات أن $z_B-z_C=z_B(z_A-z_C)$:

$$z_B-z_C=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_B(z_A-z_C)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+1\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i-\frac{\sqrt{3}}{4}i+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

منه: $z_B-z_C=z_B(z_A-z_C)$

د) طبيعة المثلث ABC : لدينا، $z_B-z_C=z_B(z_A-z_C)$ منه $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=z_B=e^{i\frac{\pi}{3}}$

وعليه نجد: $\begin{cases}BC=AC\\ \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3}+2\pi k\ \ /\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) إنشاء النقطة F وتحديد طبيعة المثلث AFC :

لدينا، $\begin{cases}S\left(C;\frac{\pi}{3};2\right)\\ S(A)=F\end{cases}$ منه $\begin{cases}CF=2CA\\ \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CF}\right)=\frac{\pi}{3}+2\pi k\ \ /k\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

- تحديد طبيعة المثلث AFC : المثلث AFC قائم في النقطة A

4) **تعيين مجموعة النقط (Γ) :**

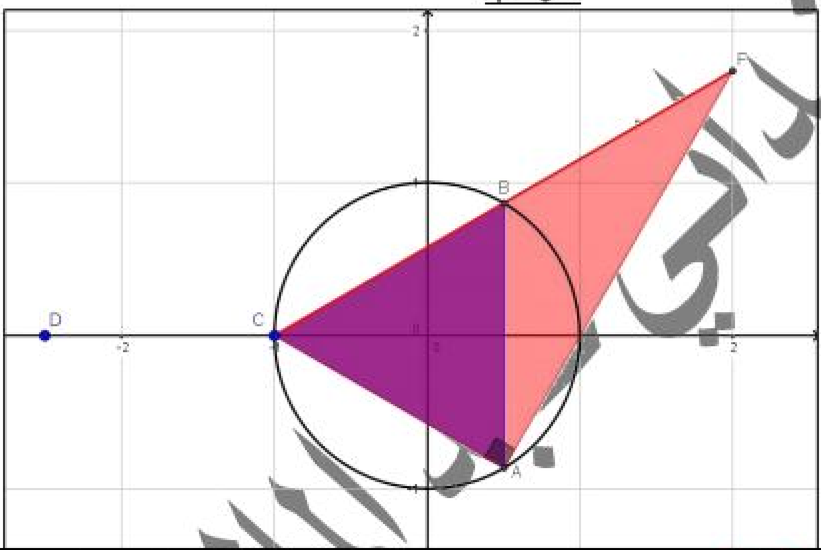
$z+1=kz_B$ تكافئ $z-z_C=ke^{i\frac{\pi}{3}}$ مع k يتغير في $\mathbb{R}_+$

يكافئ $\arg(z-z_C)=\arg\left(ke^{i\frac{\pi}{3}}\right)$

يكافئ $(\vec{u};\overrightarrow{CM})=\frac{\pi}{3}+2\pi k$

منه مجموعة النقط (Γ) للنقط M من المستوي هي نصف مستقيم (D) الذي مبدؤه C و موجه بالشعاع $\vec{w}$ حيث $(\vec{u};\vec{w})=\frac{\pi}{3}$

الرسم:



التنقيط	تصحيح التمرين الثالث (5 نقاط) المحور: المتتاليات العددية

1) **تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول:**

من اجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\frac{\frac{2u_n+2}{u_n+3}-1}{\frac{2u_n+2}{u_n+3}+2}=\frac{\frac{u_n-1}{u_n+3}}{\frac{4u_n+8}{u_n+3}}=\frac{u_n-1}{4u_n+8}=\frac{1}{4}\times\frac{u_n-1}{u_n+2}=\frac{1}{4}\times v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+2}=-\frac{1}{2}$

2) أ) **عبارة الحد العام v_n :**

من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0\times q=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=-\frac{1}{2\times4^n}$

ب) **إستنتاج عبارة u_n :**

لدينا، $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$ ومنه $(u_n+2)v_n=u_n-1$ أي $u_nv_n+2v_n=u_n-1$ أي

$(v_n-1)u_n=2v_n-1$ ومنه $u_n=\frac{-2v_n-1}{v_n-1}$ وبتالي نجد: $u_n=\frac{-2\left(-\frac{1}{2\times4^n}\right)-1}{-\frac{1}{2\times4^n}-1}$

شادي عبد المالك 2016

و بعد التبسيط نجد: $u_n = -\dfrac{2\left(1+4^n\right)}{1+2\times 4^n}$

ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{2\left(1+4^n\right)}{1+2\times 4^n} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{2\times \cancel{4^n}\left(\frac{1}{4^n}+1\right)}{\cancel{4^n}\left(\frac{1}{4^n}+2\right)} = -1$$

3) أ) حساب المجموع S_n :

$$S_n = v_0+v_1+\ldots+v_n = v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = -\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{2}{3}\left[1-\frac{1}{4^{n+1}}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{4^{n+1}-1}\right]$$

ب) التحقق ان، $\dfrac{1}{u_n+2} = \dfrac{1}{3}\left(1-v_n\right)$:

من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا $u_n = \dfrac{2v_n-1}{v_n-1}$ و عليه $u_n+2 = \dfrac{-2v_n-1}{v_n-1}+2 = \dfrac{-3}{v_n-1}$

ومنه : $\dfrac{1}{u_n+2} = \dfrac{v_n-1}{-3} = \dfrac{1}{3}\left(1-v_n\right)$

ج) إستنتاج حساب S'_n :

$$S'_n = \frac{1}{u_0+2}+\frac{1}{u_1+2}+\ldots+\frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{3}\left(1-v_0\right)+\frac{1}{3}\left(1-v_1\right)+\ldots+\frac{1}{3}\left(1-v_n\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n+1}-\left(v_0+v_1+\ldots+u_n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(n+1\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4^{n+1}}-1\right)\right]$$

تصحيح التمرين الرابع (6نقاط) المحور: الدالة الأسية	التنقيط

الجزء1

1) أ) حساب $g'(x)$:

من اجل كل عدد حقيقي x نجد: $g'(x) = 2e^x-2x-1$

دراسة إتجاه تغير الدالة g'

من اجل كل عدد حقيقي x نجد: $g''(x) = 2e^x-2$

إشارة $g''(x)$: $g''(x)\geq 0$ تكافئ $2e^x-2\geq 0$ يكافئ $e^x\geq 1$ يكافئ $x\geq 0$ ومنه نستنتج:

g' دالة متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty;0[$

ب) تبيان أنه من اجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)>0$:

نلاحظ أن الدالة g' تقبل قيمة حدية صغرى قيمتها $g'(0)=1$ ومنه:

من اجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)\geq 1$ وعليه فإن $g'(x)>0$

ج) حساب نهايتي g عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2e^x-x^2-x\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(2\frac{e^x}{x^2}-1-\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2e^x-x^2-x\right) = -\infty$$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) **تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α :**

الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على $[-1,38\,;-1,37]$ و لدينا ، $\begin{cases} g(-1,38)= \\ g(-1,37)= \end{cases}$

بما ان $g(-1,38)\times g(-1,37)<0$ فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $-1,38<\alpha<-1,37$

3) **إشارة $g(x)$:**

مما سبق نلخص إشارة $g(x)$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء02:

1) أ) **حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2e^x}{e^x-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}\left(x^2\right)}{\cancel{e^x}\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}=+\infty \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^x}{e^x-x}=0$$

ب) **حساب $f'(x)$:**

من اجل كل عدد حقيقي x ،

$$f'(x)=\frac{\left(2xe^x+x^2e^x\right)\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)\left(x^2e^x\right)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{xe^x\left[(2+x)\left(e^x-x\right)-x\left(e^x-1\right)\right]}{\left(e^x-x\right)^2}$$

$$=\frac{xe^x\left[2e^x-2x+\cancel{xe^x}-x^2-\cancel{xe^x}+x\right]}{\left(e^x-x\right)^2}$$

$$=\frac{xe^x\left(2e^x-x^2-x\right)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{xe^xg(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$$

ج) **دراسة إتجاه تغير الدالة f :**

نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $xg(x)$ لأن $\begin{cases} e^x>0 \\ \left(e^x-x\right)^2>0 \end{cases}$ على $\mathbb{R}$

ونلخصها في الجدول التالي :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- f دالة متناقصة تماما على المجال $[\alpha;0]$
- f دالة متزايدة تماما في المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[0;+\infty[$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ α 0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$
$f(x)$	$0 \nearrow f(\alpha) \searrow 0 \nearrow +\infty$

2) أ) حساب $f(\alpha)$:

لدينا ، $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2e^\alpha}{e^\alpha-\alpha}$ ومن جهة أخرى $g(\alpha)=0$ أي $2e^\alpha-\alpha^2-\alpha$ أي $e^\alpha=\dfrac{\alpha^2+\alpha}{2}$

ومنه نجد: $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2\left(\dfrac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)}{\dfrac{\alpha^2+\alpha}{2}-\alpha}=\dfrac{\alpha^2(\alpha^2+\alpha)}{\alpha^2-\alpha}=\dfrac{\alpha^3+\alpha^2}{\alpha-1}=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$

_ حصر $f(\alpha)$:

لدينا ، $-1,38<\alpha<-1,37$ منه $-2,38<\alpha-1<-2,37$ ومنه $\dfrac{2}{-2,37}<\dfrac{2}{\alpha-1}<\dfrac{2}{-2,38}$

من جهة أخرى : $(-1,37)^2<\alpha^2<(-1,38)^2$ ومنه

$$(-1,37)^2+2(-1,38)+2<\alpha^2+2\alpha+2<(-1,38)^2+2(-1,37)+2$$

ومنه: $(-1,37)^2+2(-1,38)+2+\dfrac{2}{-2,37}<\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}<(-1,38)^2+2(-1,37)+2+\dfrac{2}{-2,38}$

و بعد الحساب نجد: $\quad<f(\alpha)<\quad$

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2e^x}{e^x-x}-x^2\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cancel{x^2e^x}-\cancel{x^2e^x}-x^3}{e^x-x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x^3}{e^x}}_{=0}\underbrace{\left(\frac{-1}{1-\frac{x}{e^x}}\right)}_{=-1}=0$$

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) والمنحى (C) الممثل للدالة المربع $x\mapsto x^2$ متقاربين عند $+\infty$

ج) إنشاء المنحنى (C_f) :