الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2019

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 6 إلى الصفحة 3 من 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 7u_n - 18n + 9 \end{cases} \quad \text{و} \quad v_n = u_n - 3n + 1$$

1) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

4) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لـ 7^n على 9.

ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية على 9 للعدد $1954^{1962} + 1962^{1954} + 1442^{2019}$ ؟

جـ) أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $6S_n - 7u_n \equiv 0[9]$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

توجد إجابة صحيحة واحدة من بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية. اختر الإجابة الصحيحة مبرّرا اختيارك.

يحتوي كيس على ثلاث كريّات بيضاء تحمل الأرقام 1 , 2 , 3 وكريّتين سوداوين تحملان الرقمين 1 , 2 .

(الكريّات لا نفرّق بينها عند اللمس) نسحب من الكيس 3 كريّات عشوائيا وفي آن واحد .

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريّات السوداء المسحوبة.

1) قيم المتغير العشوائي X هي: أ) $\{1;2;3\}$ ، ب) $\{0;2;3\}$ ، جـ) $\{0;1;2\}$

2) الأمل الرياضياتي $E(X)$ لـ X هو: أ) $E(X) = \frac{4}{5}$ ، ب) $E(X) = \frac{6}{5}$ ، جـ) $E(X) = \frac{11}{10}$.

3) احتمال "الحصول على كريّة واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريّات المسحوبة"

يساوي : أ) $\frac{7}{10}$ ، ب) $\frac{9}{10}$ ، جـ) $\frac{3}{5}$

4) احتمال" باقي قسمة مجموع مربّعات الأرقام التي تحملها الكريّات المسحوبة على 13 هو 1 "

يساوي: أ) $\frac{2}{5}$ ، ب) $\frac{3}{10}$ ، جـ) $\frac{1}{5}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=1+i$ ، $z_B=2+i$ و $z_C=\frac{3}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(Γ) الدّائرة التي مركزها A وطول نصف قطرها 1 .

1) أ) تحقّق أنّ النّقطة C من الدّائرة (Γ).

ب) عيّن قيسا بالراديان للزّاوية $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ ثم استنتج أنّ C صورة B بالدوران r الذي مركزه A يطلب تعيين زاويته.

2) S التّشابه المباشر الذي يحوّل النّقطة M ذات اللاحقة z إلى النّقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+\sqrt{3}-i\sqrt{3}$$

أ) حدّد العناصر المميزة للتّشابه S .

ب) عيّن z_D لاحقة D صورة B بالتشابه S.

3) ماهي نسبة التّحاكي h الذي مركزه A حيث $S=hor$ ؟ استنتج أنّ النقط A ، C و D في استقامية.

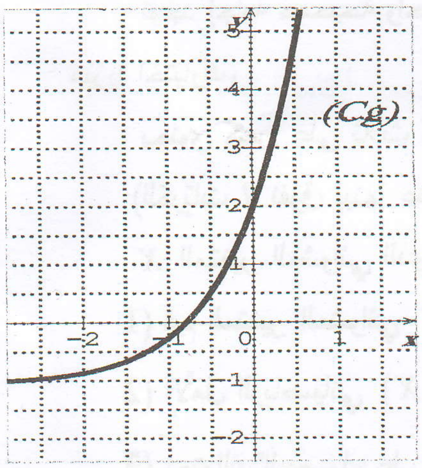
4) (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث : $z=z_A+ke^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k\in\mathbb{R}_+^*$

– تحقّق أنّ النقطة C من المجموعة (E). ثم حدّد طبيعة (E) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x+3)e^x-1$

و (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل .



بقراءة بيانية

أ) حدّد إشارة $g(-1)$ و $g\left(\frac{-1}{2}\right)$.

ب) استنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]-1;\frac{-1}{2}\right[$

بحيث $g(\alpha)=0$ ثم تحقق أنّ: $-0{,}8<\alpha<-0{,}7$.

جـ) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x+2)\left(e^x-1\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$ ثم شكّل جدول تغيرات الدالـة f .

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$ ثم استنتج انّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).

جـ) اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) الموازي للمستقيم (Δ).

4) ارسم المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) على المجال $]-\infty;1]$ (يعطى $f(\alpha)\approx-0.7$)

5) احسب $f(x)-g(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6) h الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=|x|\left(e^{|x|-2}-1\right)+1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بيّن أنّ الدّالة h زوجية .

ب) تأكد أنّه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ فإنّ : $h(x)=f(x-2)+1$.

جـ) اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسم (C_h) على المجال $[-3;3]$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 4 من 6 إلى الصفحة 6 من 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة ذات المجهول (x,y) : $5x-3y=1.....(E)$ ، حيث x و y عددان صحيحان.

أ) تحقّق أنّ الثنائية $(6n+2\,;10n+3)$ حل للمعادلة (E) حيث n عدد طبيعي.

ب) استنتج أنّ العددين $10n+3$ و $6n+2$ أوليان فيما بينهما.

2) نضع $a=10n+3$ و $b=3n+5$ وليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

أ) بيّن أنّ $d=1$ أو $d=41$.

ب) بيّن أنّه إذا كان $d=41$ فإنّ $n\equiv12[41]$.

3) ليكن العددان الطبيعيان $A=20n^2+36n+9$ و $B=6n^2+19n+15$.

أ) بيّن أنّ العددين A و B يقبلان القسمة على $2n+3$.

ب) جد بدلالة n و حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 وثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 وكريتين سوداوين تحملان الرقمين 1 ، 2 (كل الكريات متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس) .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس .

1) احسب احتمال الحوادث التالية:

أ) الحادثة A : " الحصول على كرية بيضاء واحدة ".

ب) الحادثة B : " الحصول على كريتين بيضاوين على الأكثر".

جـ) الحادثة C : " الحصول على ثلاث كريات تحمل أرقاما غير أولية ".

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات التي تحمل أرقاما أولية.

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرّف قانون احتماله.

ب) احسب $P\left(X^2-X\leq0\right)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) أ) تحقق أنّ: $\left(2-2\sqrt{3}\right)^2=16-8\sqrt{3}$.

ب) عيّن على الشكل الجبري الجذرين التربيعيين L_1 و L_2 للعدد المركب Z حيث : $Z=-16\sqrt{3}-16i$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A = 4e^{i\frac{\pi}{3}} + 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_B = \frac{1}{2}iz_A$ و $z_C = -\frac{1}{4}z_A$.

1) اكتب z_A على الشكل الجبري ، ثمّ بيّن أن $z_A = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

2) استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقيين $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) S التشابه المباشر الذي يحوّل A إلى B و يحوّل B إلى C .

لتكن M' النقطة ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاّحقة z بالتّشابه S.

أ) بيّن أنّ: $z' = \frac{1}{2}iz$.

ب) حدّد العناصر المميزة للتّشابه S.

4) G النّقطة ذات اللاّحقة z_G مرجح الجملة $\left\{(A;2),(B;-2),(C;4)\right\}$.

أ) بيّن أنّ : $z_G = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب) (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث:

$$\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = 2\sqrt{2}$$

– حدّد طبيعة (E) وعناصرها المميّزة، ثم احسب محيط (E') صورة (E) بالتشابه S.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة المعرفة والمتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=(x+1)(x+e)-e(x\ln x)$

احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln(x+1)+\frac{e\ln x}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، ثم بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x(x+1)^2}$.

جـ) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) اكتب معادلة لـــ(T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

3) أ) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α

ب) تحقق أنّ: $0,7<\alpha<0,8$.

4) (Γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln(x+1)$ على المجال $[0;+\infty[$

أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln(x+1)\right)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا.

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (Γ) .

جـ) ارسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_f).

5) m وسيط حقيقي ، عين قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=\dfrac{1+e}{2}x-m$ حلين متمايزين .

6) نقبل أنّه من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$: $\ln x < x+1$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$: $\ln 2 < f(x) < e+\ln(x+1)$.

ب) تحقّق أنّه من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$ الدالة : $x \mapsto (x+1)\ln(x+1)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x+1)$.

جـ) S مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=e-1$ و $x=e^2-1$.

- باستخدام جواب السؤال 6 – أ) ، بيّن أنّ : $(e^2-e)\ln 2 < S < e^3$.

انتهى الموضوع الثاني