(الموضوع الأول)

التمرين الأول :

- لدينا المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث : $\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \end{cases}$

1) أ)- إثبات بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n > 1$

- خطوة البدأ : من أجل $n = 0$ لدينا $\begin{cases} u_0 = 13 \\ 13 > 1 \end{cases}$ ومنه $u_0 > 1$ محققة .
- خطوة التتابع : بفرض أن $u_k > 1$ صحيحة و نبرهن أن $u_{k+1} > 1$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي k

- لدينا من فرضية التراجع $u_k > 1$ من أجل كل $k \in \mathbb{N}$

ومنه $\frac{1}{5}u_k > \frac{1}{5}$ ومنه $\frac{1}{5}u_k + \frac{4}{5} > \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$ و بذلك $u_{k+1} > 1$ محققة

توريث الخاصية من $u_k > 1$ إلى $u_{k+1} > 1$ من أجل كل عدد طبيعي k نستنتج أنه $\boxed{u_n > 1 \ / \ n \in \mathbb{N}}$.

ب)- إتجاه تغير المتتالية (u_n) :

- ندرس إشارة من أجل كل عدد طبيعي n الفرق : $(u_{n+1} - u_n)$

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n = -\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}(1-u_n)$ فان $\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}(1-u_n)}$

و من جهة أخري لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$ ومنه $1 - u_n < 0$ فان $\frac{4}{5}(1-u_n) < 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ و بذلك (u_n) متناقصة تماما من أجل كل عدد طبيعي n.

2) (v_n) متتالية عددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = ln(u_n - 1)$

- إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية :

[$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية] معناه [من أجل كل عدد طبيعي n فان $v_{n+1} = v_n + r \ / \ r \in \mathbb{R}$]

- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = ln(u_n - 1)$ ومنه

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= ln(u_{n+1} - 1) \\ v_{n+1} &= ln\left(\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1\right) \\ v_{n+1} &= ln\left(\frac{1}{5}u_n + \frac{1}{5}\right) \\ v_{n+1} &= ln\left[\frac{1}{5}(u_n - 1)\right] \\ v_{n+1} &= ln\frac{1}{5} + ln(u_n - 1) \end{aligned}$$

اذا $v_{n+1} = v_n + ln\frac{1}{5}$

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\boxed{r = ln\frac{1}{5} = -ln5}$

و بما ان (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فان الحد الأول $v_0 = ln(u_0 - 1) = ln(13-1)$ ومنه $\boxed{v_0 = ln12}$.

3) كتابة v_n بدلالة n :

لدينا (v_n) متتالية حسابية : $\begin{cases} v_0 = ln12 \\ r = -ln5 \end{cases}$ فان $\boxed{v_n = v_0 + n.r \ / \ n \in \mathbb{N}}$

و بذلك $v_n = ln12 - n\,ln5 = ln12 - ln5^n$ و منه $\boxed{v_n = ln\left(\frac{12}{5^n}\right) \quad / n \in \mathbb{N}}$

- التحقق من صحة عبارة u_n :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = ln(u_n - 1)$ فان $e^{v_n} = e^{ln(u_n-1)}$ ومنه $u_n - 1 = e^{v_n}$ ومنه $\boxed{u_n = 1 + e^{v_n} \ / n \in \mathbb{N}}$

و لدينا من جهة أخرى $v_n = ln\left(\frac{12}{5^n}\right)$ فان $u_n = 1 + e^{ln\left(\frac{12}{5^n}\right)}$ بذلك $\boxed{u_n = 1 + \frac{12}{5^n} \ / n \in \mathbb{N}}$.

- حساب نهاية u_n :

لدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 5^n = +\infty \\ 1 > 5 \end{cases}$ فان $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{12}{5^n} = 0 \\ u_n = 1 + \frac{12}{5^n} \end{cases}$ و بذلك $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 1}$.

4) التحقق من صحة المساواة: $(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = e^{v_n} + 1$ ومنه $u_n - 1 = e^{v_n}$

وبذلك $(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1) = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \cdots \times e^{v_n}$
$= e^{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}$

حيث :

$$\underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}_{\text{مجموع حدود متتالية حسابية}} = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}\left(ln12 + ln\left(\frac{12}{5^n}\right)\right)$$

$$= \frac{n+1}{2} ln\left(\frac{12^2}{5^n}\right) = ln\left[\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^2\right]^{\frac{n+1}{2}} = ln\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$$

ومنه $(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1) = e^{ln\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}}$ و بذلك $\boxed{(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1} \quad / n \in \mathbb{N}}$

◈ التمرين الثاني :

– من المعطيات نستخلص الجدول التالي :

الكيس		اللون		
		حمراء R	خضراء V	المجموع
الترقيم	①	4	4	8
	②	1	3	4
	المجموع	5	7	12

- سحب كرتين من الكيس في آن واحد (توفيقة)

و بذلك عدد الإمكانيات الكلية هي :

$\boxed{N = C_{12}^2 = \frac{12!}{2! \times (12-2)!} = \frac{12 \times 11}{2} = 66}$ إمكانية

- الحدث : A " سحب كرتين من نفس اللون ".

- الحدث ث : " سحب كرتين تحملان نفس الرقم ".

1) - التحقق أن $P(A) = \frac{31}{66}$:

- لدينا $A = \{(2R), (2V)\}$ ومنه عدد الإمكانية المحققة للحدث A هي $\boxed{N_A = C_5^2 + C_7^2 = 10 + 21 = 31}$

و بذلك $\boxed{P(A)=\frac{N_A}{N}=\frac{31}{66}}$.

- إحتمال الحدث B :

- - لدينا $B=\left\{\left(2_{(1)}\right),\left(2_{(2)}\right)\right\}$ ومنه عدد الإمكانية المحققة للحدث B هي $\boxed{N_B=C_8^2+C_4^2=28+6=34}$

و بذلك $P(B)=\frac{N_B}{N}=\frac{34}{66}$ إذا $\boxed{P(B)=\frac{17}{33}}$.

2)- علما ان الكرتين المسحوبتين من نفس اللون حساب إحتمال ان تحملان نفس الرقم :

معناه حساب $P_A(B)$ حيث $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ أو $P_A(B)=\frac{N_{A\cap B}}{N_A}$

لدينا $A\cap B=\left\{\left(2R_{(1)}\right),\left(2V_{(1)}\right),\left(2V_{(2)}\right)\right\}$ ومنه $N_{A\cap B}=C_4^2+C_4^2+C_3^2=6+6+3=15$

ومنه $P(A\cap B)=\frac{N_{A\cap B}}{N}$ ومنه $\boxed{P(A\cap B)=\frac{15}{66}}$

و بذلك $P_A(B)=\frac{15}{66}\times\frac{66}{31}$ إذا $\boxed{P_A(B)=\frac{15}{31}}$.

3)- X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس :

- قيم المتغير العشوائي X:

لدينا $\begin{cases}(2V)\xrightarrow{X}5\\(1V,1R)\xrightarrow{X}4\\(2R)\xrightarrow{X}3\end{cases}$ ومنه $X\in\{3,4,5\}$.

- قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

- حساب $P(X=X_i)\quad / X_i\in\{3,4,5\}$

- $P(X=3)=P(2R)=\frac{C_5^2}{66}=\frac{10}{66}$ ومنه $\boxed{P(X=3)=\frac{5}{33}}$
- $P(X=4)=P(1V,1R)=\frac{C_7^1\times C_5^1}{66}=\frac{35}{66}$ ومنه $\boxed{P(X=4)=\frac{35}{66}}$
- $P(X=5)=P(2V)=\frac{C_7^2}{66}=\frac{21}{66}$ ومنه $\boxed{P(X=5)=\frac{7}{22}}$

X_i	3	4	5
$P(X=X_i)$	$\frac{5}{33}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{7}{22}$

- حساب الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي X :

لدينا $E(X)=\sum_{i=1}^{3}X_i\times P(X=X_i)=3\left(\frac{5}{33}\right)+4\left(\frac{35}{66}\right)+5\left(\frac{7}{22}\right)$

ومنه $\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{3}X_i\times P(X=X_i)=\frac{25}{6}=4.17}$

◈ التمرين الثالث :

I. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $0 = (z-i)(z^2-4z+5)$:

$(z-i)(z^2-4z+5)=0$ تكافئ اما $z-i=0$ ومنه $z=i$

أو $z^2-4z+5=0$ نحسب المميز $\begin{vmatrix} a=1 \\ b=-4 \\ c=5 \end{vmatrix}$ $\Delta=b^2-4ac$ ومنه $\Delta=(-4)^2-4(1)(5)=-4=(2i)^2$

وبذلك المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين : $\begin{cases} z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\dfrac{4+2i}{2}=2+i \\ z_2=\overline{z_1}=2-i \end{cases}$

طريقة أخرى : $\left[\begin{matrix} z^2-4z+5=0 \\ (z-2)^2-4+5=0 \end{matrix}\right.$ ومنه $\begin{matrix} (z-2)^2=-1 \\ (z-2)^2=i^2 \end{matrix}$ وبذلك $\begin{cases} z-2=i \\ z-2=-i \end{cases}$ ومنه $\left[\begin{cases} z=2+i \\ z=2-i \end{cases}\right.$

وبذلك حلول المعادلة هي $\{i,2-i,2+i\}$.

II. لدينا $A(z_A=i)$ ، $B(z_B=2-i)$ و $C(z_C=2+i)$

1) كتابة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي:

- لدينا $\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=\dfrac{2+i-i}{2+i-2+i}=\dfrac{2}{2i}=\dfrac{1}{i}=-i$ ومنه $\boxed{\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=-i}$

و نعلم أن $-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$ ومنه $\boxed{\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=e^{-\frac{\pi}{2}i}}$

- طبيعة المثلث ABC

لدينا $\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=e^{-\frac{\pi}{2}i}$ ومنه $\begin{cases} \dfrac{AC}{BC}=1 \\ (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC})=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} AC=BC \\ BCA=90^\circ \end{cases}$ وبذلك نستنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في النقطة A .

2) من اجل كل عدد مركب z مع $z\neq 2+i$ حيث $f(z)=\dfrac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$

أ)- تعين مجموعة النقط (E) :

لدينا $M(z)\in(E)$ تكافئ $|f(z)|=\dfrac{1}{2}$ تكافئ $\left|\dfrac{iz-1-2i}{2z-4-2i}\right|=\dfrac{1}{2}$ ومنه $\dfrac{|iz+i^2-2i|}{|2z-4-2i|}=\dfrac{1}{2}$

ومنه $\dfrac{|i||z+i-2|}{2|z-2-i|}=\dfrac{1}{2}$ وبذلك $\dfrac{1\times|z-(2-i)|}{2|z-(2+i)|}=\dfrac{1}{2}$ ومنه $\dfrac{|z-z_A|}{|z-z_B|}=1$ ومنه $\begin{cases} |z-z_A|=|z-z_B| \\ z\neq z_B \end{cases}$

اذا $AM=BM$ وبذلك (E) هي مجموعة نقط محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

ب)- التحقق أن $[f(i)]^{1440}\in\mathbb{R}_+$:

- لدينا $f(i)=\dfrac{i(i)-1-2i}{2(i)-4-2i}=\dfrac{-1-1-2i}{2i-4-2i}=\dfrac{-2-2i}{-4}=\dfrac{1}{2}(1+i)$

☜ **أو:** لدينا $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = -1$ ومنه $z_D - z_C = -(z_A - z_C)$ وبذلك $z_D = -z_A + 2z_C$

ومنه النقطة D نظيرة النقطة A بالنسبة للنقطة C .

التمرين الرابع :

لدينا الدالة f المعرفة على $\mathcal{D}_f =]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$

1) أ)- حساب النهايات :

- لدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \end{cases}$ نستنتج أن $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty}$

- لدينا $\lim\limits_{x \to 2} x-2 = 0^-$ فان $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2} \ln x = \ln 2 \end{cases}$ نستنتج أن $\boxed{\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty}$.

- لدينا $\lim\limits_{x \to 2} x-2 = 0^+$ فان $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2} \ln x = \ln 2 \end{cases}$ نستنتج أن $\boxed{\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty}$.

- من النهايات السابقة نستنتج ان $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لمحور التراتيب معادلة لكل منهما $(x=0)$ و $(x=2)$.

ب)- حساب النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

- لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} x-2 = +\infty$ فان $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$ نستنتج أن $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

ندرس إشارة الدالة المشتقة الأولى $f'(x)$ على المجال $\mathcal{D}_f =]0;2[\cup]2;+\infty[$

من اجل كل عددحقيقي x من المجال $\mathcal{D}_f$ لدينا

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x-2} + \ln x\right)' = \left(\frac{1}{x-2}\right)' + (\ln x)'$$

$$= \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{-x + (x-2)^2}{x(x-2)^2} = \frac{-x + x^2 - 4x + 4}{x(x-2)^2}$$

ومنه $\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2} \quad / \ x \in \mathcal{D}_f}$

- بما ان $x \in \mathcal{D}_f$ فان $x(x-2)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x^2 - 5x + 4)$

لدينا $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ a + b + c = 1 - 5 + 4 = 0 \end{cases}$ فان $\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4 \end{cases}$

x	0		1		2		4		$+\infty$
x^2-5x+4		+	0	−	‖	−	0	+	

ومنه نستنتج ان f متناقصة تماما على المجال $]1;2[$ و المجال $]2;4[$ ومتزايدة تماما على $]0;1[$ المجال و المجال $]4;+\infty[$.

✖ جدول تغيرات الدالة f :

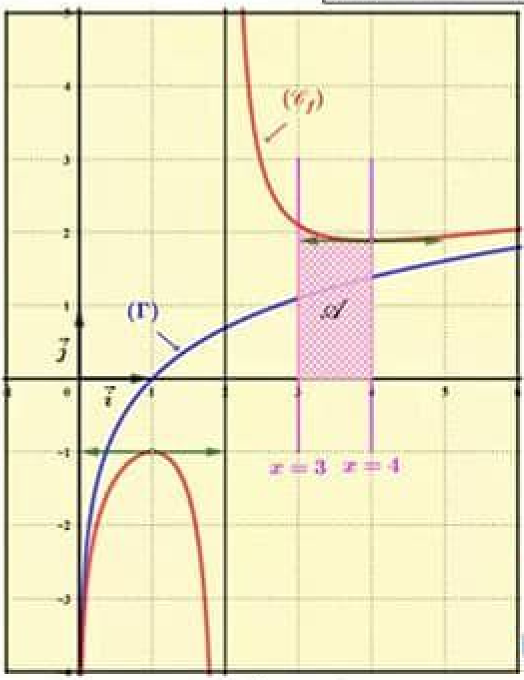
$f(1) = \frac{1}{1-2} + \ln 1 = -1$ و $f(4) = \frac{1}{4-2} + \ln 4 = \frac{1}{2} + \ln 4$

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+\ln 4$	↗	$+\infty$

3) (Γ) هو المنحنى البياني للدالة $x \mapsto \ln x$.

أ) حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$

✖ لدينا $\begin{cases} f(x)-\ln x=\dfrac{1}{x-2} & / x\in \mathcal{D}_f \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0 \end{cases}$ ومنه $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=0}$



✖ نستنتج أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل (Γ) كمنحنى مقارب له بجوار $(+\infty)$

ب) دراسة وضعية $(\mathcal{C}_f)$ و المنحنى (Γ):

✖ ندرس على المجال $\mathcal{D}_f$

إشارة الفرق $\left[f(x)-\ln x\right]=\dfrac{1}{x-2}$

لدينا $x-2=0$ من أجل $x=2$

ومنه نستنتج الإشارة

x	0 $\quad 2$	$+\infty$
$\frac{1}{x-2}$	$-$	$+$

وبذلك $(\mathcal{C}_f)$ يقع أسفل المنحنى (Γ) في المجال $]1;2[$

و $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق المنحنى (Γ) في المجال $]2;+\infty[$.

4) رسم كل من المنحنيين (Γ) و $(\mathcal{C}_f)$:

5) أ)- إيجاد عبارة $H(x)$ بدلالة x :

لدينا $H(x)=\int_3^x \ln(t)\,dt$ باستعمال المكاملة بالتجزئة نضع $\begin{cases}u(t)=\ln(t)\\ v'(t)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'(t)=\dfrac{1}{t}\\ v(t)=t\end{cases}$

$$H(x)=\left[u(t)\times v(t)\right]_3^x-\int_3^x u'(t)\times v(t)\,dt$$

ومنه

$$=\left[t\cdot\ln(t)\right]_3^x-\int_3^x 1\,dt=\left[(x\ln x)-3\ln 3\right]-\left[t\right]_3^x=x\ln x-3\ln 3-\left[x-3\right]$$

وبذلك $\boxed{H(x)=x(-1+\ln x)+3(1-\ln 3)}$

ب)- حساب المساحة $\mathcal{A}$:

بما ان $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق محور الفواصل في المجال $[3;4]$ فان $\mathcal{A}=\left[\int_3^4 f(x)\,dx\right]\times(u.a)$

$$\int_3^4 f(x)\,dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}+\ln(x)\right)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+\int_3^4 \ln(x)\,dx$$

حيث $=\int_3^4\dfrac{(x-2)'}{x-2}\,dx+H(4)=\left[\ln(x-2)\right]_3^4+\left[4(-1+\ln 4)+3(1-\ln 3)\right]$

$=\left[\ln 2-\ln 1\right]+\left[-4+4\ln 4+3-3\ln 3\right]$

ومنه $\int_3^4 f(x)\,dx=-1+9\ln 2-3\ln 3=-7+3\ln 8-3\ln 3$ وبذلك $\mathcal{A}=\boxed{-1+3\ln\left(\dfrac{8}{3}\right)\approx 1.94\,(u.a)}$.

6) لدينا الدالة g المعرفة على المجال $\mathcal{D}_g =]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ: $g(x)=f(-2x)$:

★ اتجاه تغير الدالة g :

✎ لدينا $x\in\mathcal{D}_g$ / $\begin{cases} g(x)=(f\circ\varphi)(x) \\ \varphi(x)=-2x \end{cases}$ أي الدالة g هي مركب من الدالة التألفة φ متبوعة بالدالة f

وباستعمال خاصية إتجاه تغير دالة مركبة :

☆ لدينا $]-\infty;-2] \xrightarrow{\varphi(x)=-2x} [4;+\infty[\xrightarrow{f(\varphi(x))} [\frac{1}{2}+\ln 4;+\infty[$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2]$.

☆ لدينا $[-2;-1[\xrightarrow{\varphi(x)=-2x}]2;4] \xrightarrow{f(\varphi(x))} [\frac{1}{2}+\ln 4;+\infty[$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-2;-1[$.

☆ لدينا $\left]-1;-\frac{1}{2}\right] \xrightarrow{\varphi(x)=-2x} [1;2[\xrightarrow{f(\varphi(x))}]-\infty;-1]$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$.

☆ لدينا $\left[-\frac{1}{2};0\right[\xrightarrow{\varphi(x)=-2x}]0;1] \xrightarrow{f(\varphi(x))}]-\infty;-1]$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};0\right[$.

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2]$ و المجال $\left[-\frac{1}{2};0\right[$.

و متزايدة تماما على المجال على المجال $[-2;-1[$ و المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$

✎ أو : ندرس إشارة $g'(x)$ على المجال $\mathcal{D}_g =]-\infty;-1[\cup]-1;0[$

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathcal{D}_g$

$$g'(x)=[f(-2x)]'=(-2x)'\times f'(-2x)=-2f'(-2x)$$

لدينا

$$=-2\left[\frac{(-2x)^2-5(-2x)+4}{-2x(-2x-2)^2}\right]=\frac{-2(4x^2+10x+4)}{-2x[-2(x+1)]^2}=\frac{(x+2)(4x+2)}{4x(x+1)^2}$$

ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $\frac{(x+2)(4x+2)}{x}$

على المجال $\mathcal{D}_g$ حيث $(x+2)(4x+2)=0$ من اجل $\begin{cases} x=-2 \\ \text{و} \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$

x	$-\infty$	-2		-1		$-\frac{1}{2}$		0
$(x+2)(4x+2)$	+	0	−		−	0	+	
x	−		−		−		−	0
$\frac{(x+2)(4x+2)}{x}$	−	0	+		+	0	−	

ومنه الدالة g متناقصة تماما على كل من المجال $]-\infty;-2]$ و المجال $\left[-\frac{1}{2};0\right[$.

و متزايدة تماما على المجال على كل من المجال $[-2;-1[$ و المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$.

★ إنتهى ★

تمنياتي لكم بالنجاح في شهادة البكالوريا

وبذلك $P(\bar{T})=\frac{C_7^3}{120}=\frac{35}{120}$ ومنه $\boxed{P(\bar{T})=\frac{7}{24}}$

3)- بعد سحب من الصندوق كرتين على التوالي دون إرجاع :

المطلوب" احتمال الحصول على كرتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداءهما زوجي" :

- بفرض الحدث F " الكريتان تحملان رقمان مجموعهما فردي".

- بفرض الحدث Z " الكريتان تحملان رقمان جداؤهما زوجي".

مجموع الرقمين يكون فردي

المجموع	⓪	①	②
⓪	0	1	2
①	1	2	3
②	2	3	4

جداء الرقمين يكون زوجي

الجداء	⓪	①	②
⓪	0	0	0
①	0	1	2
②	0	2	4

⊕ / ⊗	⓪	①	②
⓪	0 / 0	1 / 0	2 / 0
①	1 / 0	2 / 1	3 / 2
②	2 / 0	3 / 2	4 / 4

حساب $P_Z(F)=\frac{P(F\cap Z)}{P(Z)}$

- لدينا $\bar{Z}=\{2_{(1)}\}$ ومنه $P(\bar{Z})=\frac{A_3^2}{A_{10}^2}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$

و بذلك $P(Z)=1-P(\bar{Z})=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$

- لدينا $F\cap Z=\{(1_{(1)},1_{(0)}),(1_{(1)},1_{(2)})\}$

ومنه $P(F\cap Z)=\frac{2\left(A_5^1\times A_3^1+A_2^1\times A_3^1\right)}{A_{10}^2}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$

إذا $P_Z(F)=\frac{7}{15}\times\frac{15}{14}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$ ومنه $\boxed{P_Z(F)=\frac{1}{2}}$

◈ التمرين الثاني:

- لدينا الدالة f المعرفة على المجال $]4;7[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x+2}+4$.

1) أ) التحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]4;7[$:

- ندرس إشارة $f'(x)$ على $]4;7[$ حيث $f'(x)=\left(\sqrt{x+2}+4\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4;7[$ لدينا $x+2>0$ و بذلك $f'(x)>0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]4;7[$.

ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4;7[$ فان $f(x)\in[4;7[$:

لدينا في المجال $x\in]4;7[$ الدالة متزايدة تماما فان $\begin{cases} f(4)\le f(x)<f(7) \\ f(4)=4+\sqrt{6} \\ f(7)<7 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 4+\sqrt{6}\le f(x)<7 \\ 4\le 4+\sqrt{6} \end{cases}$

إذا $4\le f(x)<7$ ومنه $f(x)\in[4;7[$.

2) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4;7[$ فان $f(x)-x=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$

لدينا $f(x)-x=\sqrt{x+2}+4-x=\frac{\left[\sqrt{x+2}-(x-4)\right]\left[\sqrt{x+2}+(x-4)\right]}{\sqrt{x+2}+(x-4)}=\frac{x+2-(x-4)^2}{\sqrt{x+2}+(x-4)}$

ومنه $f(x)-x=\dfrac{x+2-x^2+8x-16}{\sqrt{x+2}+(x-4)}$ و بذلك $f(x)-x=\dfrac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$.

✖ استنتاج ان $f(x)-x>0$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4;7[$:

لدينا $f(x)-x=\dfrac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4;7[$

فان إشارة الفرق $(f(x)-x)$ من إشارة $(-x^2+9x-14)$ في المجال $]4;7[$

$-x^2+9x-14=0$ -

ومنه $(x-7)(-x+2)=0$ من أجل $\begin{cases}x=7\\x=2\end{cases}$

x	$-\infty$	2		4		7	$+\infty$
$-x^2+9x-14$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)-x$					$+$		

ومنه $f(x)-x>0$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4;7[$.

3) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $\begin{cases}u_0=4\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

أ) إثبات بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $4\le u_n<7$

- خطوة البدأ: من أجل $n=0$ لدينا $\begin{cases}u_0=4\\4\le 4<7\end{cases}$ ومنه $4\le u_0<1$ محققة.
- خطوة التتابع: بفرض أن $4\le u_k<7$ صحيحة و نبرهن أن $4\le u_{k+1}<7$ صحيحة . من أجل كل عدد طبيعي k .

- لدينا من فرضية التراجع $4\le u_k<7$ من أجل كل $k\in\mathbb{N}$ و الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$.

فان $\begin{cases}f(4)\le f(u_k)<f(7)\\f(u_k)=u_{k+1}\end{cases}$ وبذلك $4\le u_{k+1}<7$ محققة

توريث الخاصية من $4\le u_k<7$ إلى $4\le u_{k+1}<7$ من أجل كل عدد طبيعي k نستنتج أنه . $\boxed{4\le u_n<7\quad/\,n\in\mathbb{N}}$

ب)- إتجاه تغير المتتالية (u_n):

- ندرس إشارة من أجل كل عدد طبيعي n الفرق: $(u_{n+1}-u_n)$

لدينا $\begin{cases}u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n\\4\le u_n<7\end{cases}$ فان $f(u_n)-u_n>0$ ومنه $u_{n+1}-u_n>0$

وبذلك نستنتج أن (u_n) متزايدة تماما من أجل كل عدد طبيعي n.

✖ بما أن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد7 فهي متقاربة .

4) أ) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان $7-u_{n+1}<\dfrac{1}{4}(7-u_n)$

- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$7-u_{n+1}=7-f(u_n)=7-\sqrt{u_n+2}-4=3-\sqrt{u_n+2}$$
$$=\frac{\left(3-\sqrt{u_n+2}\right)\left(3+\sqrt{u_n+2}\right)}{3+\sqrt{u_n+2}}=\frac{9-u_n-2}{3+\sqrt{u_n+2}}=\frac{7-u_n}{3+\sqrt{u_n+2}}$$

و من جهة أخرى لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $4\le u_n<7$ ومنه $6\le u_n+2<9$ ومنه $\sqrt{6}\le\sqrt{u_n+2}<3$

ومنه $\begin{cases}\sqrt{6}+3\le 3+\sqrt{u_n+2}<6\\4<3+\sqrt{6}\end{cases}$ ومنه $4<3+\sqrt{u_n+2}$ و بذلك $\dfrac{1}{3+\sqrt{u_n+2}}<\dfrac{1}{4}$

و بما ان $4 \le u_n < 7$ فان $7-u_n > 0$ ومنه $\frac{7-u_n}{3+\sqrt{u_n+2}} < \frac{1}{4}(7-u_n)$ وبذلك $7-u_{n+1} < \frac{1}{4}(7-u_n)$.

ب) استنتاج من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < 7-u_n < 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $4 \le u_n < 7$ ومنه $0 < 7-u_n \le 4$ ومنه $0 < 7-u_n$

- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $7-u_{n+1} < \frac{1}{4}(7-u_n)$

$$\begin{cases} \text{من اجل } n=0 \text{ لدينا } & 7-u_1 < \frac{1}{4}(7-u_0) \\ \text{من اجل } n=1 \text{ لدينا } & 7-u_2 < \frac{1}{4}(7-u_1) \\ \text{من أجل } n=2 \text{ لدينا } & 7-u_3 < \frac{1}{4}(7-u_2) \\ \vdots & \vdots \\ \text{من أجل } n-1 \text{ لدينا } & 7-u_n < \frac{1}{4}(7-u_{n-1}) \end{cases}$$

بالضرب طرف لطرف نجد :

$$(7-u_1)(7-u_2)(7-u_3)\times\cdots\times(7-u_1) < \left(\frac{1}{4}\right)^n (7-u_0)(7-u_1)(7-u_2)\times\cdots\times(7-u_{n-1})$$

ومنه $\cancel{(7-u_1)}\,\cancel{(7-u_2)}\,\cancel{(7-u_3)}\times\cdots\times(7-u_n) < \left(\frac{1}{4}\right)^n (7-u_0)\,\cancel{(7-u_1)}\,\cancel{(7-u_2)}\times\cdots\times\cancel{(7-u_{n-1})}$

ومنه $\begin{cases} (7-u_n) < \left(\frac{1}{4}\right)^n (7-u_0) \\ 7-u_0 = 7-4 = 3 \end{cases}$ وبذلك $(7-u_n) < 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

إذا نستنتج من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $0 < 7-u_n < 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

- نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا $\begin{cases} 0 < 7-u_n < 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad / \; 0 < \frac{1}{4} < 1 \end{cases}$ و حسب مبرهنة الحصر في النهايات نستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}(7-u_n) = 0$

ومنه $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 7}$

التمرين الثالث :

لدينا $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ، $z_B = \overline{z_A} = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$ و $z_C = -2\,z_A = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{6}$

1) أ) كتابة العدد المركب z_A على الشكل الأسي:

لدينا: $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6} : \begin{cases} |z_A| = \sqrt{2+6} = 2\sqrt{2} \\ arg(z_A) = \theta : \left\{ \begin{array}{l} cos\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ sin\,\theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\rangle \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ومنه $\boxed{z_A = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}}$

بما أن $\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A} \neq 0$ حتى يكون $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ حقيقي معناه $arg\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n = k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

لدينا $\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A} = \frac{-6\sqrt{2}}{6\sqrt{2}\, e^{\frac{4}{3}\pi i}} = -e^{-\frac{4}{3}\pi i} = e^{\pi i} \times e^{-\frac{4}{3}\pi i} = e^{\left(1-\frac{4}{3}\right)\pi i} = e^{-\frac{\pi}{3} i}$ إذا $\boxed{\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A} = e^{-\frac{\pi}{3} i}}$

ومنه $arg\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n = k\pi$ تكافئ $arg\left(e^{-\frac{\pi}{3} i}\right)^n = k\pi$ تكافئ $arg\left(e^{-\frac{\pi}{3} n i}\right) = k\pi$

ومنه $-\frac{\pi}{3} n = k\pi$ ومنه $-\frac{n}{3} = k$ ومنه $\begin{cases} n = -3k \ / k \in \mathbb{Z} \\ \lambda = -k \end{cases}$ إذا $\boxed{n = 3\lambda \ / \lambda \in \mathbb{N}}$.

5) تعين مجموعة النقط (E) :

لدينا $M(z) \in (E)$ يكافئ $\begin{cases} \frac{z_A - z}{z_B - z} = t \quad / t \in \mathbb{R}_+^* \\ z \neq z_A \ , z \neq z_B \end{cases}$

لدينا $\begin{cases} \frac{z_A - z}{z_B - z} = t \\ t \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} z_A - z = t\,(z_B - z) \\ t \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = t\,\overrightarrow{MB} \\ t \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$

ومنه الشعاعين $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MA}$ مرتبطين خطيا و لهما نفس الاتجاه

ومنه (E) هي مجموعة نقط المستقيم (AB) ما عدا القطعة $[AB]$ أي $(E) = (AB) / [AB]$.

التمرين الرابع :

لدينا $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ التمثلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ حيث $\begin{cases} f(x) = e^x - \frac{1}{2} e . x^2 \\ g(x) = e^x - e . x \end{cases}$

1) أ)- حساب النهاياإتجاه تغير الدالة g :

✖ ندرس إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$

من أجل كل عددحقيقي x لدينا $g'(x) = (e^x - e.x)' = e^x - e$ ومنه $\boxed{g'(x) = e^x - e}$

- $g'(x) = 0$ تكافئ $e^x - e = 0$ تكافئ $e^x = e$ ومنه $x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$e^x - e$	$-$	0	$+$

ومنه g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$

ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

ب) إشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية :

من إتجاه تغير الدالة g و $g(1) = 0$ (تمثل القيمة الحدية الصغري للدالة g على المجال $\mathbb{R}$)

نستنتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل عددحقيقي x .

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$:

✖ ندرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

من أجل كل عددحقيقي x لدينا $f'(x) = \left(e^x - \frac{1}{2} e . x^2\right)' = e^x - e.x = g(x)$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وبذلك f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

3) حساب النهايات :

- لدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{2}ex^2 = -\infty \end{cases}$ نستنتج أن $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

- لدينا ع. ت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ لدينا $f(x) = e^x - \dfrac{1}{2}e.x^2 = x^2\left[\dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{1}{2}e\right]$

نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ فان $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{1}{2}e = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$ نستنتج أن $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

✖ جدول تغيرات الدالة f :

$$f(1) = e - \frac{1}{2}e = \frac{e}{2} \approx 1.36$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\left(\frac{e}{2}\right)$	↗	$+\infty$

4) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ على $\mathbb{R}$:

✖ ندرس على $\mathbb{R}$ إشارة الفرق $[f(x) - g(x)]$

من أجل كل عددحقيقي x لدينا

$$f(x) - g(x) = \left(e^x - \frac{1}{2}e.x^2\right) - \left(e^x - e.x\right)$$
$$= -\frac{1}{2}e.x^2 + e.x = \frac{1}{2}e.x(-x+2)$$

ومنه إشارة الفرق من إشارة الجداء $x(-x+2)$ على $\mathbb{R}$

حيث $x(-x+2) = 0$ من أجل $\begin{bmatrix} x = 0 \\ \text{و} \\ x = 2 \end{bmatrix}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وبذلك

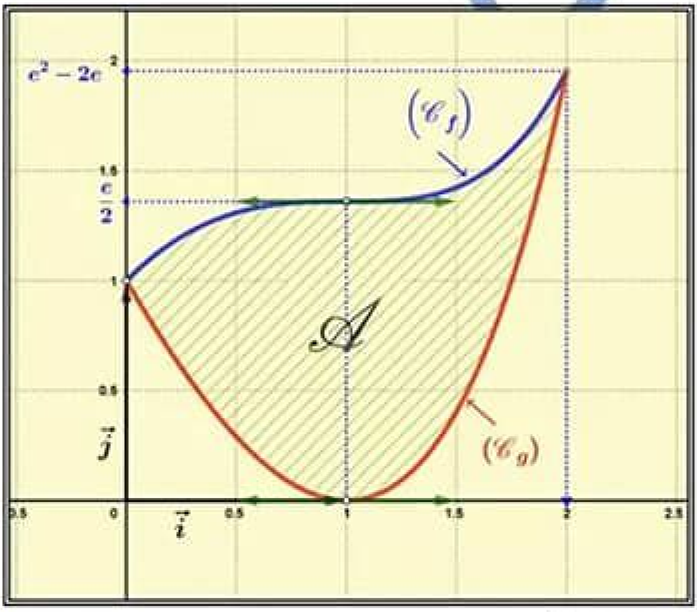
- المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقع أسفل المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ في المجالين $]-\infty;0[$ و $]2;+\infty[$
- المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقع فوق المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ في المجال $]0;2[$
- يتقاطعان في النقطتين $(0;1)$ و $(2;e(e-2))$

5) رسم كل $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ في المجال $[0;2]$

المعلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

و (وحدة الطول $2cm$)

مع ($e^2 - 2e \approx 2$)



6) حساب $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$:

بما ان $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ في المجال $[0;2]$

فان $\mathcal{A} = \left[\int_3^4 [f(x)-g(x)]dx\right]\times(u.a)$ حيث $(u.a)=4cm^2$

لدينا

$$\int_0^2 [f(x)-g(x)]dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}e.x(-x+2)\right)dx = \frac{1}{2}e\int_0^2 (-x^2+2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}e\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2 = \frac{1}{2}e\left[\left(-\frac{8}{3}+4\right)-0\right] = \frac{1}{2}e\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}e$$

وبذلك $\mathcal{A} = \boxed{\frac{2}{3}e\times 4 = \frac{8}{3}e \approx 7.25\,cm^2}$.

7) لدينا الدالة h المعرفة على المجال $[-2;2]$ كمايلي : $h(x)=\frac{1}{2}e.x^2-e^{|x|}$ و تمثيلها البياني (Γ) .

أ) التحقق h أن زوجية :

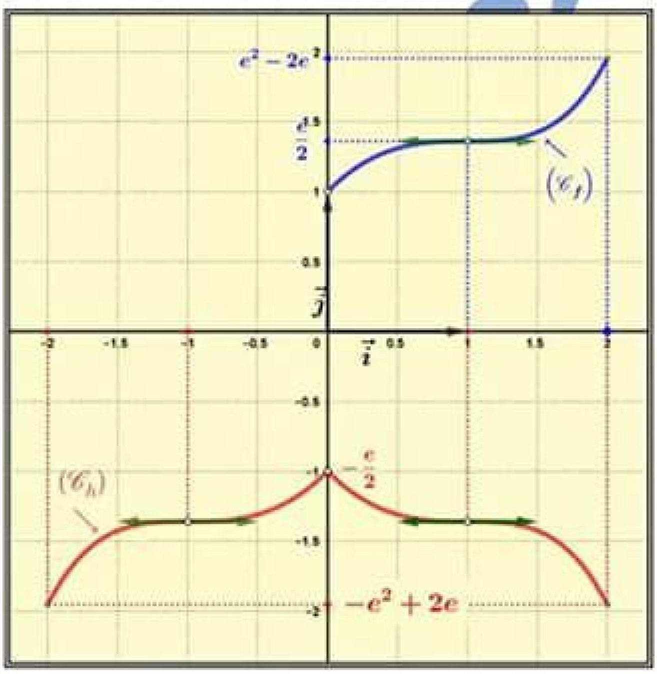
- لدينا $\mathcal{D}_h=[-2;2]$ متناظر بالنسبة للصفر .
- من أجل كل عددحقيقي x من $\mathcal{D}_h=[-2;2]$

لدينا $h(-x)=\frac{1}{2}e.(-x)^2-e^{|-x|}=\frac{1}{2}e.(x)^2-e^{|x|}=h(x)$ ومنه نستنتج أن h زوجية على $[-2;2]$.

ب) حساب $[h(x)+f(x)]$ في المجال:

- من أجل كل عددحقيقي x من المجال $[0;2]$ لدينا $x=|x|$ و بذلك $h(x)=\frac{1}{2}e.x^2-e^x$

ومنه $[h(x)+f(x)]=e^x-\frac{1}{2}e.x^2+\frac{1}{2}e.x^2-e^x=0$.



- إستنتاج كيفية رسم المنحنى (Γ):
  - بما أنه من أجل كل عددحقيقي x من المجال $[0;2]$ لدينا $[h(x)+f(x)]=0$ معناه $h(x)=-f(x)$ ومنه نستنتج أن المنحنى (Γ) يناظر المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة لمحور الفواصل في المجال $[0;2]$.
  - بما ان الدالة h زوجية في المجال $[-2;2]$ فبيانها (Γ) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

- إنتهى -

تمنياتي لكم بالنجاح في شهادة البكالوريا